ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414

УДК 517.929.2

ЭФФЕКТИВНЫЕ КРИТЕРИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© А. А. Кандаков, К. М. Чудинов

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: kandakov.sasha@gmail.com, cyril@list.ru

Аннотация. Получены критерии устойчивости нескольких классов линейных автономных разностных уравнений, выраженные в явном аналитическом виде и в виде принадлежности значения вектор-функции от параметров уравнения области трехмерного пространства.

Ключевые слова: разностное уравнение; устойчивость; область устойчивости; многочлен Шура–Кона

Введение

В исследовании асимптотических свойств решений динамических систем особое значение имеют условия наличия тех или иных свойств, в частности, устойчивости, выраженные через заданные параметры системы. Для *автономных* систем, то есть систем, описываемых набором параметров, не зависящих от времени, естественно стремление получить необходимые и достаточные условия устойчивости. Наиболее эффективными являются условия, не только выраженные через параметры системы аналитически, но и имеющие наглядное геометрическое описание. Такое описание дается, как правило, построением областей геометрического пространства, попадание в которые значений явно заданных функций от параметров системы является условием устойчивости.

Систему автономных разностных уравнений

$$x(n) = \sum_{j=1}^{k} A_j x(n-j), \tag{0.1}$$

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

где $A_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $j = \overline{0,k}$, в случае $k > 1$ принято рассматривать как дискретный аналог линейной дифференциальной динамической системы с последействием и называть каждое слагаемое в правой части *запаздыванием* системы (0.1), а ее саму — системой *с несколькими запаздываниями*. Асимптотические свойства решений системы (0.1) определяются расположением на комплексной плоскости корней ее характеристического многочлена $\det\bigl(E - \sum_{j=0}^{k} A_j\lambda^{k-j}\bigr)$. В частности, устойчивость определяется расположением корней относительно единичной окружности $|\lambda| = 1$. Таким образом, исследование асимптотического поведения решений уравнения (0.1) формально сводится к решению задачи о расположении корней многочленов. Поиск эффективных методов определения попадания корней многочлена в конкретную область имеет богатую историю, и ей посвящена обширная литература (см. монографии [1, 2] и библиографию к ним).

В связи с расширением области применения разностных уравнений актуальность исследования асимптотики решений уравнения (0.1) растет, и в последние годы были найдены эффективные условия устойчивости для нескольких его подклассов. Целью настоящей работы является получение эффективных критериев устойчивости нескольких новых подклассов уравнения (0.1). В первом разделе статьи вводятся основные понятия, приводится обзор известных результатов в исследуемой области, описывается подход к решению задачи и конкретизируется ее постановка. Во втором разделе представлены основные результаты работы: теорема о необходимых и достаточных условиях устойчивости уравнения (0.1) и полученные с ее помощью условия устойчивости нескольких классов уравнений. В третьем разделе приведено несколько примеров, иллюстрирующих основные результаты статьи.

1. Обзор известных результатов и постановка задачи

Уравнение (0.1) будем рассматривать на дискретной полуоси $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Решением уравнения (0.1) назовем функцию $x\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}^m$, удовлетворяющую равенству (0.1) для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, для что любой *начальной функции* $\varphi\colon \{-k,\dots,-1\} \to \mathbb{C}^m$ существует единственное решение уравнения (0.1), такое что $x(n) = \varphi(n)$, $n = \overline{-k,-1}$.

Через $|\cdot|$ обозначим норму в пространстве $\mathbb{C}^m$.

Понятие *устойчивость решения* отражает непрерывность зависимости решения от начальной функции. Для уравнения (0.1) в силу его линейности и однородности устойчивость определяется оценкой нормы значений решения. В данной работе мы рассматриваем только асимптотическую устойчивость уравнения (0.1), которая для него совпадает с экспоненциальной, что следует из формулы представления решения [3, с. 77].

Определение 1.1. Уравнение (0.1) называется *экспоненциально устойчивым*, если существует константа $\gamma > 0$, такая что для любого решения x найдется такое $N > 0$, что $|x(n)| \leqslant N\exp(-\gamma n)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Всюду ниже для краткости вместо термина *экспоненциальная устойчивость* используется термин *устойчивость*.

Как известно [3, с. 246], уравнение (0.1) устойчиво, если и только если все корни его характеристического многочлена лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга $\{z : |z| < 1\}$.

Рассмотрим ряд известных результатов, используемых для получения результатов данной работы.

Задача устойчивости системы с одним запаздыванием $x(n) = Ax(n-k)$ сводится к задаче устойчивости скалярного уравнения $x(n) = ax(n-k)$ с комплексным коэффициентом a. Критерием устойчивости является попадание всех собственных чисел матрицы A внутрь единичного круга.

Если в правой части уравнения (0.1) находятся более одной матрицы, то задача получения условий устойчивости, вообще говоря, не сводится к задаче устойчивости скалярного уравнения такого же вида и является принципиально более трудной.

В тех случаях, когда исследование уравнения с двумя запаздываниями

$$x(n) = A_p x(n-p) + A_q x(n-q), \tag{1.1}$$

где $0 < q \leqslant p$, может быть сведено к исследованию скалярного уравнения с двумя запаздываниями

$$x(n) = a_q x(n-q) + a_p x(n-p), \tag{1.2}$$

где $a_p, a_q \in \mathbb{C}$, в изучении условий устойчивости были достигнуты определенные успехи. В частности, такое сведение имеет место в случае существования линейного преобразования, приводящего обе матрицы A_p и A_q к верхнетреугольной форме.

Критерий устойчивости скалярного уравнения $x(n) = x(n+1) + ax(n-k)$ с вещественным коэффициентом a получен в работе [4], уравнения с комплексным a и, как следствие, уравнения (1.1) в случае $q = 1$, $A_1 = E$ — в работе [5].

Теорема 1.1. [5] Уравнение $x(n) - x(n-1) = Ax(n-k)$ экспоненциально устойчиво, если и только если все собственные числа матрицы A находятся внутри области, ограниченной кривой

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2i \sin \frac{\varphi}{2k} e^{i\varphi},\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Рассмотрим уравнение (1.2). Случай $a_p, a_q \in \mathbb{R}$ подробно изучен в работах [6–8], а в наиболее простом виде критерий устойчивости получен в недавней работе [9]. Если $a_p, a_q \in \mathbb{C}$, то уравнение (1.2) определяется четырьмя вещественными параметрами. В работах [10] и [11] методом D-разбиения получена в явном виде область устойчивости уравнения (1.2) как однопараметрическое семейство областей в трехмерном вещественном пространстве. Приведем некоторые результаты этих работ.

Пусть $u, v \in \mathbb{R}$ и $w \in \mathbb{C}$. Рассмотрим многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^p - w\lambda^{p-q} - (u + iv). \tag{1.3}$$

Для фиксированного w семейство решений $(u, v) = (u(\varphi), v(\varphi))$ уравнения $P(e^{i\varphi}) = 0$ при всевозможных $\varphi \in \mathbb{R}$ представляет собой кривую на координатной плоскости Ouv, определяемую параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \cos p\varphi - |w| \cos(\arg w + (p-q)\varphi), \\ v(\varphi) &= \sin p\varphi - |w| \sin(\arg w + (p-q)\varphi). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Кривая разбивает плоскость Ouv на области, характеризующиеся тем, что для любых двух точек (u_j, v_j), $j = 1, 2$, одной области количество корней многочленов (1.3) с коэффициентами $a_p = u_j + iv_j$ и $a_q = w$, $j = 1, 2$, попадающих в единичный круг, одинаково.

Определим семейство плоских открытых областей $G(p, q, l, \psi)$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geqslant q$, $l \in [0, \frac{p}{p-1})$, $\psi \in (-\pi, \pi]$.

Области $G(p, 1, l, \psi)$ определим как ограниченные кривыми (1.4) при $q = 1$, $w = le^{i\psi}$ и изменении φ на отрезке $[-\varphi_1, \varphi_1]$, где φ_1 — корень уравнения $l = \frac{\sin p\varphi}{\sin(p-1)\varphi}$, расположенный на отрезке $[0, \pi/p]$. Отметим, что область $G(p, 1, l, \psi)$ непуста для всех $l \in [0, \frac{p}{p-1})$, содержит начало координат при $l \in [0, 1)$ и не содержит при $l \in [1, \frac{p}{p-1}]$.

В случае взаимно-простых p, q для $l \in [0, 1)$ обозначим через $G(p, q, l, \psi)$ открытую область, полученную разбиением (1.4) и содержащую начало координат; для $l \in [1, \frac{p}{p-1})$ положим $G(p, q, l, \psi) = \varnothing$. Отметим, что область $G(p, q, l, \psi)$ стягивается в точку $(0, 0)$ при $l \to 1 - 0$.

В случае $d =$ НОД $(p, q) > 1$ положим $G(p, q, l, \psi) = G(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}, l, \psi)$.

Обозначим

$$D_\psi(p, q) = \bigcup_{l \in [0, \frac{p}{p-1})} G(p, q, l, \psi).$$

Области $G(p, q, l, \psi)$ являются выпуклыми, их объединение $D_\psi(p, q)$ представляет собой конусообразную выпуклую область (см. работы [10] и [11]).

Теорема 1.2. [11] Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geqslant q$. Уравнение (1.2) устойчиво, если и только если

$$(\operatorname{Re} a_p, \operatorname{Im} a_p, |a_q|) \in D_{\arg a_q}(p, q). \tag{1.5}$$

Теорема 1.3. [11] Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geqslant q$ и матрицы A_p и A_q приводятся единым линейным преобразованием M к треугольной форме: $MA_pM^{-1} = P$, $MA_qM^{-1} = Q$. Уравнение (1.1) устойчиво, если и только если для каждой пары диагональных элементов p_{jj}, q_{jj}, $j = \overline{1, m}$, матриц P и Q соответственно справедливо условие

$$(\operatorname{Re} p_{jj}, \operatorname{Im} p_{jj}, |q_{jj}|) \in D_{\arg q_{jj}}(p, q). \tag{1.6}$$

В настоящей работе мы получаем новые условия устойчивости некоторых уравнений вида уравнения (0.1), используя приведенные выше результаты и предложенный в нашей недавней статье [12] подход к изучению условий устойчивости скалярного уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x(n-j) = 0, \tag{1.7}$$

где $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, k}$. Подход состоит в сопоставлении метода D-разбиения с классическими результатами И. Шура [13] и А. Кона [14] о расположении корней многочлена относительно заданного круга на комплексной плоскости.

Далее полагаем, что $a_0, a_k \neq 0$. Число k будем называть *порядком* уравнения (1.7).

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем называть уравнение

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_j x(n-j) = 0, \tag{1.8}$$

где $b_0 \neq 0$, *редуцированным уравнением* (относительно уравнения (1.7)), если его коэффициенты определяются через коэффициенты уравнения (1.7) равенствами

$$b_j = b_0 \frac{a_0 a_j - a_k a_{k-j}}{a_0^2 - a_k^2}, \quad j = \overline{1, k-1}.$$

Теорема 1.4. [14] Уравнение (1.7) устойчиво, если и только если $|a_k/a_0| < 1$ и устойчиво редуцированное уравнение (1.8).

Теорема 1.4 сводит условия экспоненциальной устойчивости уравнения (1.7) к условиям устойчивости уравнений более низких порядков. Для некоторых классов уравнений таким путем удается не только получить критерий устойчивости исходного уравнения в аналитическом виде, но и наглядное геометрическое описание области устойчивости (см. [12]).

В следующем разделе работы мы выделяем классы уравнений вида (0.1), для которых задача устойчивости явно сводится к задаче устойчивости уравнений с одним и двумя запаздываниями, и получаем новые критерии устойчивости в терминах попадания значения явной функции от коэффициентов уравнения в заданную область пространства параметров.

2. Основные результаты

Далее термин *пара* понимается в смысле *упорядоченная пара.*

О п р е д е л е н и е 2.1. Назовем пару коэффициентов (a_j, a_{k-j}) уравнения (1.7) *балансной*, если

$$a_0 a_j = a_k a_{k-j}. \tag{2.1}$$

Пару коэффициентов (a_j, a_{k-j}), не являющуюся балансной, назовем *небалансной.*

По определениям 1.2 и 2.1 балансная пара (a_j, a_{k-j}) коэффициентов уравнения (1.7) определяет коэффициент $b_j = 0$ редуцированного уравнения (1.8), небалансная пара — коэффициент $b_j \neq 0$. Таким образом, из этих определений следует, что *количество ненулевых слагаемых в уравнении* (1.8)*, редуцированном относительно уравнения* (1.7)*, на один больше количества небалансных пар* (a_j, a_{k-j}), $j = \overline{1, k-1}$, *коэффициентов уравнения* (1.7)*.*

Для заданного уравнения (1.7) будем обозначать $\beta(x, y) = \dfrac{a_0 x - a_k y}{a_0^2 - a_k^2}$.

Теорема 2.1. *Пусть из пар коэффициентов* (a_j, a_{k-j}), $j = \overline{1, k-1}$, *уравнения* (1.7) *небалансна ровно одна пара* (a_p, a_{k-p}). *Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и* $|\beta(a_p, a_{k-p})| < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к уравнению (1.7) теорему 1.4. Все коэффициенты уравнения, редуцированного относительно уравнения (1.7), кроме b_0 и $b_p = b_0\beta(a_p, a_{k-p})$, оказываются равными нулю. Остается применить критерий устойчивости уравнения с одним запаздыванием. □

Теорема 2.2. *Пусть из пар коэффициентов* (a_j, a_{k-j}), $j = \overline{1, k-1}$, *уравнения* (1.7) *небалансны ровно две:* (a_p, a_{k-p}) *и* (a_q, a_{k-q}), $p > q$. *Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и*

$$(\operatorname{Re} b_p, \operatorname{Im} b_p, |b_q|) \in D_{\arg b_q}(p, q),$$

где $b_p = -\beta(a_p, a_{k-p})$, $b_q = -\beta(a_q, a_{k-q})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к уравнению (1.7) теорему 1.4. Редуцированное уравнение имеет вид

$$b_0x(n) + b_0\beta(a_q, a_{k-q})x(n-q) + b_0\beta(a_p, a_{k-p})x(n-p) = 0.$$

Остается применить теорему 1.2, учитывая условие $p > q$. □

Выделим все случаи, когда устойчивость уравнения (1.7) однократным применением теоремы 1.4 сводится к устойчивости уравнения (1.8) с не более чем двумя запаздываниями. Для этого отметим, что для любого $j \in \{1, \dots, k-1\}$, кроме $k/2$ в случае четного k, имеет место следующая зависимость.

Количество ненулевых коэффициентов из a_j и a_{k-j}	Количество балансных пар из (a_j, a_{k-j}) и (a_{k-j}, a_j)	Количество ненулевых коэффициентов из b_j и b_{k-j}
0	2	0
1	0	2
2	1 или 0	1 или 2

В случае, когда k четно и $|a_0| > |a_k|$, имеем $b_{k/2} = \frac{b_0 a_{k/2}}{a_0 + a_k}$, то есть $b_{k/2} \neq 0$, если и только если $a_{k/2} \neq 0$.

Из изложенных наблюдений нетрудно получить следующие выводы: однократным применением теоремы 1.4 сводиться к уравнению с двумя запаздываниями могут уравнения не более чем с пятью запаздываниями, к уравнению с одним запаздыванием — уравнения не более чем с тремя запаздываниями.

В приводимых ниже следствиях теорем 2.1 и 2.2 рассмотрим все случаи, когда число запаздываний редуцированного уравнения меньше числа запаздываний исходного.

Следствие 2.1. *Пусть уравнение* (1.7) *содержит ровно четыре ненулевых коэффициента* a_0, a_{k-p}, a_p *и* a_k, *и обе пары* (a_p, a_{k-p}) *и* (a_{k-p}, a_p) *небалансны. Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и*

$$(\operatorname{Re} b_M, \operatorname{Im} b_M, |b_m|) \in D_{\arg b_m}(M, m),$$

где $M = \max\{p, k-p\}$, $m = \min\{p, k-p\}$, $b_M = -\beta(M, m)$, $b_m = -\beta(m, M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1.4 уравнение

$$a_0x(n) + a_px(n-p) + a_px(n-p) + a_px(n-p) = 0$$

устойчиво, если и только если устойчиво уравнение

$$y(n) - b_my(n-m) - b_My(n-M) = 0.$$

Остается применить теорему 1.2. □

Доказательства следующих четырех утверждений столь же просты.

Следствие 2.2. *Пусть уравнение* (1.7) *содержит ровно шесть ненулевых коэффициентов* a_0, a_p, a_{k-p}, a_q, a_{k-q} *и* a_k, *и обе пары* (a_{k-p}, a_p) *и* (a_{k-q}, a_q) *балансны. Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и*

$$(\operatorname{Re} b_M, \operatorname{Im} b_M, |b_m|) \in D_{\arg b_m}(M, m),$$

где $M = \max\{p, q\}$, $m = \min\{p, q\}$, $b_M = -\beta(M, m)$, $b_m = -\beta(m, M)$.

Следствие 2.3. *Пусть* k *чётно, уравнение* (1.7) *содержит ровно пять ненулевых коэффициентов* a_0, a_p, $a_{k/2}$, a_{k-p} *и* a_k, *и пара* (a_{k-p}, a_p) *балансна. Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и*

$$(\operatorname{Re} b_M, \operatorname{Im} b_M, |b_m|) \in D_{\arg b_m}(M, m),$$

где $M = \max\{k/2, p\}$, $m = \min\{k/2, p\}$, $b_M = -\beta(M, m)$, $b_m = -\beta(m, M)$.

Следствие 2.4. *Пусть уравнение* (1.7) *содержит ровно четыре ненулевых коэффициента* a_0, a_{k-p}, a_p *и* a_k, *и пара* (a_{k-p}, a_p) *балансна. Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и* $|\beta(a_p, a_{k-p})| < 1$.

Следствие 2.5. *Пусть* k *чётно и уравнение* (1.7) *содержит ровно три ненулевых коэффициента* a_0, $a_{k/2}$ *и* a_k. *Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и* $|a_{k/2}| < |a_0 + a_k|$.

Полученные результаты применимы к уравнению (0.1) в случае, когда все матрицы A_j приводятся единым линейным преобразованием к треугольному виду. Действительно, после такого преобразования все собственные значения матриц оказываются на главной диагонали, поэтому устойчивость системы равносильна устойчивости m скалярных уравнений

$$x(n) = \sum_{j=1}^{m} a_{ll}^{(j)} x(n-j), \quad l = \overline{1, m}.$$

В частности, такой подход применим в случае попарной коммутируемости матриц: $A_jA_l = A_lA_j$, $j, l = \overline{1, m}$. Выделим важный в приложениях случай, когда все матрицы A_j являются *циркулянтами*, то есть имеют вид

$$A_j = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl} S^l, \text{ где } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Собственными значениями матрицы $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ являются корни степени m из единицы. Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть матрицы A_j, $j = \overline{1,k}$, имеют вид (2.2). Система (0.1) устойчива, если и только если устойчивы m скалярных уравнений*

$$x(n) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl}\lambda^l x(n-j),$$

где λ пробегает множество всех комплексных корней степени m из единицы.

3. Примеры

Сформулированные в предыдущем разделе утверждения позволяют получать эффективные признаки для различных классов уравнений вида (0.1) любых порядков.

Будем называть уравнение (1.7) или (1.8) *s-членным*, если среди его коэффициентов ровно s ненулевых. Иначе говоря, уравнение (0.1) с d запаздываниями является $(d+1)$-членным.

Пример 3.1. Устойчивость четырехчленного скалярного уравнения произвольного порядка с симметричными коэффициентами

$$x(n) + ax(n-p) + acx(n-k+p) + cx(n-k) = 0 \tag{3.1}$$

равносильна устойчивости двучленного уравнения

$$y(n) + ay(n-p) = 0.$$

Таким, образом, уравнение (3.1) устойчиво, если и только если $|c| < 1$ и $|a| < 1$.

Пример 3.2. Устойчивость шестичленного уравнения с пропорциональными парами коэффициентов

$$x(n) - ax(n-1) - bx(n-2) - bcx(n-k+2) - acx(n-k+1) + cx(n-k) = 0 \tag{3.2}$$

равносильна устойчивости уравнения второго порядка

$$y(n) = ay(n-1) + by(n-2).$$

При помощи замены $y(n) = e^{in\arg a}z(n)$ перейдем к уравнению с вещественным коэффициентом в слагаемом с меньшим запаздыванием

$$z(n) = |a|z(n-1) + be^{-2i\arg a}z(n-2),$$

и по теоремам 1.2 и 1.4 получим критерий: уравнение (3.2) устойчиво, если и только если $|b| < 1$ и точка $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, где $u+iv = be^{-2i\arg a}$, попадает внутрь области, ограниченной кривой

$$\left\{(\cos 2\omega - |a|\cos\omega, \sin 2\omega - |a|\sin\omega) : -\arccos\frac{|a|}{2} \leqslant \omega \leqslant \arccos\frac{|a|}{2}\right\}.$$

В уравнении четного порядка $k = 2r$ ненулевой центральный коэффициент образует пару с собой, и эта пара небалансна (за исключением заведомо неустойчивого случая $a_0 = a_k$), при этом он образует только один коэффициент редуцированного уравнения $b_r = \frac{a_0 a_r - a_k a_r}{a_0^2 - a_k^2} = \frac{a_r}{a_0 + a_k}$. Пятичленное уравнение может однократным применением теоремы 1.4 быть сведено к трехчленному, только если центральный коэффициент не равен нулю.

П р и м е р 3.3. Пусть $k = 2r$, $p \neq r$. Уравнение

$$x(n) - x(n-p) - ax(n-r) - cx(n-k+p) + cx(n-k) = 0 \tag{3.3}$$

устойчиво, если и только если устойчиво уравнение

$$y(n) = y(n-p) + \frac{a}{1+c} y(n-r).$$

Таким образом, в случае $p < r$ уравнение (3.3) устойчиво, если и только если $|c| < 1$ и

$$\left(\operatorname{Re} \frac{a}{1+c}, \operatorname{Im} \frac{a}{1+c}, 1 \right) \in D_0(r,p);$$

в случае $p > r$ — если и только если $|c| < 1$ и

$$\left(1, 0, \left| \frac{a}{1+c} \right| \right) \in D_{arg \frac{a}{1+c}}(p,r).$$

Отметим, что применение понижения порядка не всегда упрощает вид уравнения и исследование его устойчивости.

П р и м е р 3.4. Рассмотрим уравнение с несимметричными коэффициентами

$$x(n) + x(n-1) + x(n-2) + ax(n-k) = 0, \quad k > 3.$$

После применения понижения порядка количество запаздываний увеличивается:

$$y(n) + \frac{1}{1-a^2} y(n-1) + \frac{1}{1-a^2} y(n-2) - \frac{a}{1-a^2} y(n-k+2) - \frac{a}{1-a^2} y(n-k+1) = 0.$$

Этот эффект не отрицает того, что порядок уравнения всегда можно понизить достаточное число раз, чтобы количество запаздываний уменьшилось. Но понижение порядка уравнения имеет свою цену — усложнение вида коэффициентов (подробнее см. [12]).

В последних двух примерах рассмотрим векторные уравнения.

П р и м е р 3.5. Уравнение

$$x(n) - x(n-1) - Ax(n-p) - cAx(n-k+p) - cx(n-k+1) + cx(n-k) = 0, \tag{3.4}$$

где $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $c \in \mathbb{C}$, однократным понижением порядка приводится к уравнению

$$y(n) = y(n-1) + Ay(n-p).$$

По теореме 1.1 уравнение (3.4) устойчиво, если и только если все собственные числа матрицы A находятся внутри области, ограниченной кривой

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2i \sin \frac{\varphi}{2p} e^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

П р и м е р 3.6. Рассмотрим уравнение (0.1) с матричными коэффициентами в виде циркулянтов:

$$x(n) + aS^2x(n-1) + abS^3x(n-k+1) + bSx(n-k) = 0, \tag{3.5}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, матрица $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ имеет вид (2.2). Уравнение (3.5) устойчиво, если и только если устойчивы скалярные уравнения

$$x(n) + a\lambda_j^2x(n-1) + ab\lambda_j^3x(n-k+1) + b\lambda_jx(n-k) = 0, \quad j = \overline{1,m},$$

где λ_j — все корни степени m из 1. Понижением порядка задача сводится к устойчивости уравнений

$$y(n) + a\lambda_j^2y(n-1) = 0.$$

Таким образом, уравнение (3.5) устойчиво, если и только если $|a| < 1$ и $|b| < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marden M.* Geometry of Polynomials. 2nd ed. Providence: American Math. Soc., 1966. 243 p.

2. *McNamee J.M., Pan V.* Numerical Methods for Roots of Polynomials. Studies in Computational Mathematics. Cambridge: Elsevier Science, 2013. Vol. 16. 718 p.

3. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. N. Y.: Springer, 2005. 539 p.

4. *Levin S., May R.* A note on difference-delay equations // Theoret. Popul. Biol. 1976. Vol. 9. P. 178-187.

5. *Levitskaya I.S.* A note on the stability oval for $x_{n+1} = x_n + Ax_{n-k}$ // J. Difference Equ. Appl. 2004. Vol. 11. № 8. P. 701-705.

6. *Dannan F.M.* The asymptotic stability of $x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0$ // J. Difference Equ. Appl. 2004. Vol. 7, № 6. P. 589-599.

7. *Кипнис М.М., Нигматулин Р.М.* Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С. 25-39.

8. *Николаев Ю.П.* Анализ геометрии D-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 2004. № 12. С. 49-61.

9. *Čermák J., Jánský J.* Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation // Appl. Math. Letters. 2015. Vol. 43. P. 56-60.

10. *Kipnis M.M., Malygina V.V.* The stability cone for a matrix delay difference equation // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2011. Article ID 860326. 15 p.

11. *Ivanov S.A., Kipnis M.M., V.V. Malygina V.V.* The stability cone for a difference matrix equation with two delays // ISRN Applied Math. 2011. № 2011. P. 1-19.

12. *Кандаков А.А., Чудинов К.М.* Эффективный критерий устойчивости дискретной динамической системы // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 4. С. 88-103.

13. *Schur I.* Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind // J. Reine Angew. Math. 1918. Bd. 148. S. 122-145.

14. *Cohn A.* Über die Anzahl der Wurzein einer algebraischen Gleichung in einem Kreise // Math. Zeit. 1922. Bd. 14. S. 111-148.

Поступила в редакцию 12 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Кандаков Александр Андреевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, студент, факультет прикладной математики и механики, e-mail: kandakov.sasha@gmail.com

Чудинов Кирилл Михайлович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: cyril@list.ru

Для цитирования: *Кандаков А.А., Чудинов К.М.* Эффективные критерии экспоненциальной устойчивости автономных разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 402–414. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414

EEFFECTIVE CRITERIA OF EXPONENTIAL STABILITY OF AUTONOMOUS DIFFERENCE EQUATIONS

A. A. Kandakov, K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolskiy Av., Perm 614990 Russian Federation
E-mail: kandakov.sasha@gmail.com, cyril@list.ru

Abstract. We obtain stability criteria for several classes of linear autonomous difference equations. The criteria are expressed in explisit analytic form, as well as in the form of belonging values of a vector function of the equation parameters to a domain in three-dimensional space.

Keywords: difference equation; stability; stability domain; Schur–Cohn polynomial

REFERENCES

1. Marden M. *Geometry of Polynomials.* Providence, American Math. Soc., 1966, 243 p.

2. McNamee J.M., Pan V. *Numerical Methods for Roots of Polynomials. Studies in Computational Mathematics.* Cambridge, Elsevier Science, 2013, vol. 16, 718 p.

3. Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations.* New York, Springer, 2005, 539 p.

4. Levin S., May R. A note on difference-delay equations. *Theoret. Popul. Biol.*, 1976, vol. 9, pp. 178-187.

5. Levitskaya I.S. A note on the stability oval for $x_{n+1} = x_n + Ax_{n-k}$. *J. Difference Equ. Appl.*, 2004, vol. 11, no. 8, pp. 701-705.

6. Dannan F.M. The asymptotic stability of $x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0$. *J. Difference Equ. Appl.*, 2004, vol. 7, no. 6, pp. 589-599.

7. Kipnis M.M., Nigmatulin R.M. Ustoychivost' trekhchlennykh lineynykh raznostnykh uravneniy s dvumya zapazdyvaniyami [Stability of the trinomial linear difference equations with two delays]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2004, no. 11, pp. 25-39. (In Russian).

8. Nikolaev Yu.P. Analiz geometrii D-razbieniya dvumernoy ploskosti proizvol'nykh koehffitsientov kharakteristicheskogo polinoma diskretnoy sistemy [The geometry of D-decomposition of a two-dimensional plane of arbitrary coefficients of the characteristic polynomial of a discrete system]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2004, no. 12, pp. 49-61. (In Russian).

9. Čermák J., Jánský J. Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation. *Appl. Math. Letters*, 2015, vol. 43, pp. 56-60.

10. Kipnis M.M., Malygina V.V. The stability cone for a matrix delay difference equation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2011. Article ID 860326, 15 p.

The work is performed within the basic part of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project № 1.5336.2017/8.9), and is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00928).

11. Ivanov S.A., Kipnis M.M., V.V. Malygina V.V. The stability cone for a difference matrix equation with two delays. *ISRN Applied Math.*, 2011, no. 2011, pp. 1-19.

12. Kandakov A.A., Chudinov K.M. Ehffektivnyy kriteriy ustoychivosti diskretnoy dinamicheskoy sistemy [Effective stability criterion for a discrete dynamical system]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya – Applied Mathematics and Control Sciences*, 2017, no. 4, pp. 88-103. (In Russian).

13. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, 1918, vol. 148, pp. 122-145. (In German).

14. Cohn A. Über die Anzahl der Wurzein einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. *Math. Zeit.*, 1922, vol. 14, pp. 111-148. (In German).

Received 12 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 19 June Month 2018
There is no conflict of interests.

Kandakov Aleksandr Andreyevich, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Student, Faculty of Applied Mathematics and Mechanics, e-mail: kandakov.sasha@gmail.com

Chudinov Kirill Mikhaylovich, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Research Centre on Functional Differential Equations, e-mail: cyril@list.ru

For citation: Kandakov A.A., Chudinov K.M. Effektivnye kriterii eksponentsial'noy ustoychivosti avtonomhykh raznostnykh uravneniy [Effective criteria of exponential stability of autonomous difference equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 402–414. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414 (In Russian, Abstr. in Engl.).